



دوره جمع‌بندی دوپینگ

جمعه

۱۴۰۴/۰۱/۱۵

دفترچه پاسخ

بانک سوالات کنکور:

گسسته: فصل ۲

هندسه: فصل ۱ دوازدهم

# دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی  
ریاضیات

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
ریاضیات	۳۰	۱	۳۰	۵۳ دقیقه

گسسته و هندسه	آمار و احتمال + هندسه	آمار و احتمال + هندسه	گسسته و هندسه	-	گسسته و هندسه
هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



سوالات کنکور: فصل ۲ گسسته

۱- یک گراف ساده ۶ رأسی ۴-منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

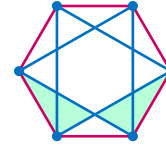
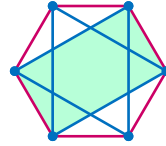
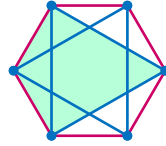
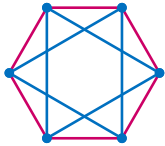
۹ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول:

گراف ۶ رأسی ۴-منتظم به صورت مقابل است که دورهای به طول ۴ در آن عبارتند از:



= ۱۵

۶ تا

۳ تا

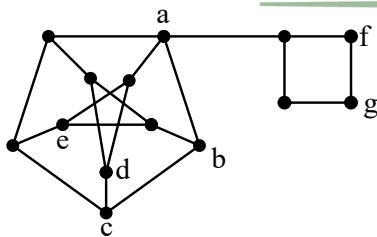
۶ تا

روش دوم:

با توجه به گرافهای فوق می توان فهمید هر ۴ رأس که از ۶ رأس گراف انتخاب می کنیم یک دور به طول ۴ را تشکیل می دهد. لذا تعداد کل دورهای به طول ۴ در این گراف برابر است با:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

گروه آموزشی ماز



۲- کدام مجموعه برای گراف روبه رو، یک مجموعه احاطه گر مینیمال است؟

{a, c, e, g} (۱)

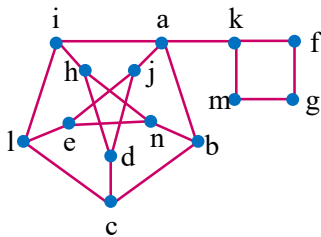
{a, d, e, g} (۲)

{a, b, d, e} (۳)

{a, d, e, f} (۴)

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۲



رأسها را نام گذاری کرده و به بررسی گزینه ها می پردازیم:

۱ مجموعه احاطه گر مینیمال نیست چرا که رأس h احاطه نمی شود.

۲ مجموعه احاطه گر مینیمم است که مینیمال نیز به حساب می آید.

۳ مجموعه احاطه گر مینیمال نیست چرا که رؤس f, g و m احاطه نمی شوند.

۴ مجموعه احاطه گر مینیمال نیست چرا که رأس m احاطه نمی شود.

گروه آموزشی ماز

۳- در یک گراف با درجه رأس های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵، تعداد دورها با طول ۳، کدام است؟

۶ (۴)

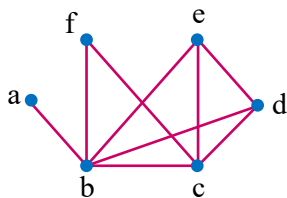
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۳



دورها به طول ۳:

- bfc b
- bec b
- bed b
- bdc b
- ced c

گروه آموزشی ماز

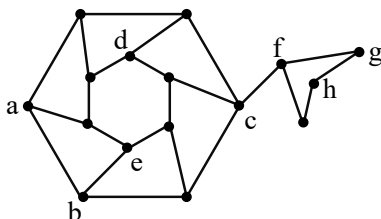
۴- کدام مجموعه، برای گراف روبه رو، یک مجموعه احاطه گر مینیمال است؟

{a, b, c, d, h} (۱)

{b, c, e, d, g} (۲)

{a, c, e, d, h} (۳)

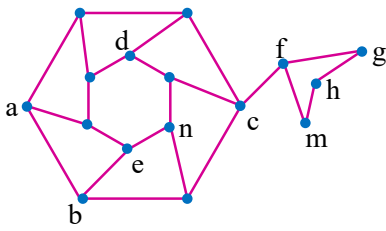
{a, c, e, d, g} (۴)





(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

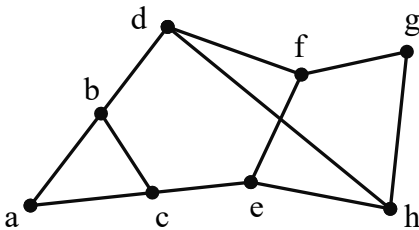
پاسخ: گزینه ۳



مجموعه موجود در گزینه «۱» احاطه‌گر نیست چون رأس  $n$  را احاطه نمی‌کند. مجموعه‌های موجود در گزینه‌های «۲» و «۴» احاطه‌گر نیستند چون هیچ‌کدام از آن‌ها رأس  $m$  را احاطه نمی‌کنند.

گروه آموزشی ماز

۵- در گراف زیر، کدام مجموعه احاطه‌گر مینیمال، نیست؟



- ۱)  $\{a, e, g\}$
- ۲)  $\{a, f, g\}$
- ۳)  $\{b, e, g\}$
- ۴)  $\{c, f, h\}$

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۱

یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌های آن دیگر احاطه‌گر نباشد، مجموعه احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم. با توجه به گراف داده شده به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:  
گزینه «۱»: مجموعه احاطه‌گر نیست. چرا که رأس  $d$  احاطه نمی‌شود.

- گزینه «۲»: مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. چرا که با حذف  $a$ ، رأس  $a$ ،  $b$  و  $c$  احاطه نمی‌شوند. با حذف  $f$ ، رأس  $e$  و  $d$  احاطه نمی‌شوند. با حذف  $g$ ، رأس  $h$  احاطه نمی‌شود.
- گزینه «۳»: مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. چرا که با حذف  $b$ ، رأس  $a$ ،  $b$  و  $d$  احاطه نمی‌شود. با حذف  $e$ ، رأس  $e$  احاطه نمی‌شود. با حذف  $g$ ، رأس  $g$  احاطه نمی‌شود.
- گزینه «۴»: مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. چرا که با حذف  $c$ ، رأس  $a$ ،  $b$  و  $c$  احاطه نمی‌شود. با حذف  $f$ ، رأس  $f$  احاطه نمی‌شود. با حذف  $h$ ، رأس  $h$  احاطه نمی‌شود.

گروه آموزشی ماز

۶- در یک گراف ۵ رأسی  $K$  - منتظم با بیشترین مقدار ممکن  $K$ ، تعداد دورها با طول ۴، کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۴

$$\binom{p}{n} \times \frac{(n-1)!}{2} \quad (p \geq 3)$$

تعداد دورهای به طول  $n$  در گراف کامل  $K_p$ :

گراف ۵ رأسی  $K$  - منتظم با بیشترین مقدار  $K$ ، همان گراف کامل ۴ - منتظم از مرتبه ۵ است. حال تعداد دورها به طول ۴ در گراف  $K_5$  برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} n=4 \\ p=5 \end{array} \right. \Rightarrow \binom{p}{n} \frac{(n-1)!}{2} = \binom{5}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 5 \times \frac{3!}{2} = 5 \times 3 = 15$$

گروه آموزشی ماز



۷- فرض کنید  $\log_{\frac{\Delta}{2}}(3x-2) = 1$  ، مقدار  $x$ ، کدام است؟

$\frac{7}{3}$  (۴)

۴ (۳)

$\frac{17}{3}$  (۲)

۹ (۱)

(دشوار - محاسباتی - ترکیبی - ۱۱۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

- اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  باشد، دترمینان ماتریس  $A$  را با  $|A|$  نمایش داده و داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- اگر لگاریتمها با معنی باشند، داریم:

•  $\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$

•  $\log_c^a - \log_c^b = \log_c^{\frac{a}{b}}$

•  $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

با توجه به نکته گفته شده داریم:

$$A = \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2)$$

حال به کمک دو رابطه  $\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$  و  $\log_c^a - \log_c^b = \log_c^{\frac{a}{b}}$  داریم:

$$A = (\log \frac{5}{2})(\log 10) = \log \frac{5}{2}$$

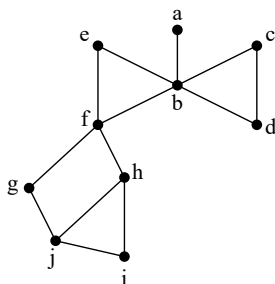
حال معادله داده شده را به صورت مقابل بازنویسی می کنیم:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}}_A \log_{\frac{\Delta}{2}}^{(3x-2)} = 1 \Rightarrow \log_{\frac{\Delta}{2}}^{(3x-2)} \times \log_{\frac{\Delta}{2}}^{(3x-2)} = 1 \Rightarrow \log_{\frac{\Delta}{2}}^{(3x-2)} = \frac{1}{\log_{\frac{\Delta}{2}}^{(3x-2)}}$$

از طرفی مطابق رابطه  $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$  داریم: (توجه: مبنای  $\log \frac{5}{2}$ ، ۱۰ می باشد).

$$\log_{\frac{\Delta}{2}}^{(3x-2)} = \log_{\frac{\Delta}{2}}^{10} \Rightarrow 3x - 2 = 10 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

گروه آموزشی ماز



۸- در گراف زیر، مجموعه احاطه گر مینیمال، کدام است؟

{b, h} (۱)

{b, g, i} (۲)

{a, e, h} (۳)

{a, e, f, j} (۴)

(متوسط - نموداری - ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۲

مجموعه موجود در گزینه ۲، یک مجموعه احاطه گر مینیمال است. چون اولاً رئوس b, g و i، تمام رئوس گراف را احاطه می کنند. همچنین با حذف رأس b ← رئوس a, b, c, d, e احاطه نمی شود.

با حذف رأس g ← رأس g احاطه نمی شود.

با حذف رأس i ← رئوس h و i احاطه نمی شود.

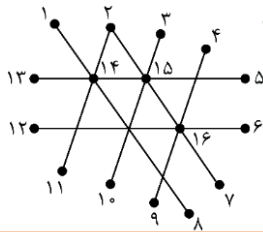
بررسی سایر گزینه ها:

۱ مجموعه {b, h} احاطه گر مینیمال نیست، چون قادر به احاطه رأس g نیست.



۳ مجموعه {a, e, h} احاطه گر مینیمال نیست، چون قادر به احاطه رؤس c، d و g نیست.

۴ مجموعه {a, e, f, j} احاطه گر مینیمال نیست، چون قادر به احاطه رؤس c و d نیست.



گروه آموزشی ماز

۹- برای گراف زیر، عدد احاطه گری مینیمال کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۲

اگر  $G$  یک گراف  $n$  رأسی و بزرگترین درجه آن  $\Delta$  باشد:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$$

عدد احاطه گری

این گراف ۱۶ رأس دارد ( $n = 16$ ) و بزرگترین درجه رؤس آن برابر  $\Delta = 6$  است (برای رأس‌های ۱۴ و ۱۵ و ۱۶، بنابراین:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{16}{6+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

این به این معنی است که با کمتر از ۳ رأس نمی‌توان همه رأس‌ها را احاطه کرد. حال اگر رؤس ۱۴، ۱۵ و ۱۶ را انتخاب کنیم متوجه خواهیم شد که همه رأس‌های گراف احاطه می‌شوند. پس  $\gamma(G) = 3$  است.

گروه آموزشی ماز

۱۰- در گراف  $G$ ، مجموعه همسایگی باز هر رأس دارای ۲ عضو است. اگر  $q(\bar{G}) = 3q(G)$  باشد، مقدار  $p(G)$  کدام است؟

- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

گراف  $G$ ،  $2-p$  منتظم است. در نتیجه گراف  $\bar{G}$ ،  $(p-3)$  منتظم است:

$$q(\bar{G}) = 3q(G) \Rightarrow \frac{p(p-3)}{2} = 3 \times \frac{2p}{2}$$

$$\Rightarrow p-3=6 \Rightarrow p=9$$

گروه آموزشی ماز

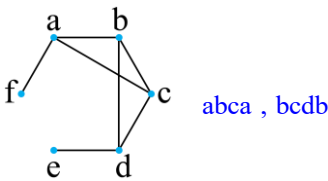
۱۱- در گراف با درجه رأس‌های ۱، ۱، ۳، ۳، ۳، ۳ دو رأس با کمترین درجه، غیرمجاورند. تعداد دورها به طول ۳ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

گراف مورد نظر به شکل مقابل است، بنابراین دو دور به طول سه دارد.



گروه آموزشی ماز

۱۲- در گراف  $G$ ،  $\Delta(G) + \delta(G) = 12$ ،  $\Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = 2$  و  $G$  با حداقل تعداد رأس رسم شده است. اگر  $\bar{G}$  همبند باشد، کمترین تعداد یال‌های آن کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۴ (۲)
- ۶ (۳)
- ۸ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

نکته

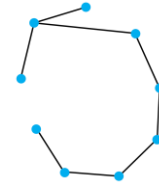
حداقل تعداد یال برای همبندی گراف  $G$  از مرتبه  $p$ ، برابر  $q_{\min} = p-1$  است.

دقت کنید که چون  $\Delta(G) = 7$  است، پس  $p \geq 8$ ، ولی به ازای  $p = 8$  و  $\Delta(G) = 7$ ، گراف  $G$  ناهمبند می‌شود که مخالف فرض است، پس  $p = 9$  انتخاب می‌شود.



$$\left. \begin{aligned} \Delta(G) + \delta(G) &= 12 \\ (p-1 - \delta(G)) - (p-1 - \Delta(G)) &= 2 \\ \Delta(G) - \delta(G) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \Delta(G) = 7 \\ \delta(G) = 5 \end{cases} \xrightarrow{\bar{G}} \min(p-1) = \min(q(\bar{G})) = 8$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\bar{G}) &= 3 \\ \delta(\bar{G}) &= 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\bar{G}}$$



سؤالات کنکور: فصل ۱ هندسه

۱۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، از رابطه ماتریسی  $AX = A - 2I$ ، ماتریس  $X$ ، کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا طرفین رابطه  $AX = A - 2I$  را از سمت چپ در  $A^{-1}$  ضرب می‌کنیم:

$$AX = A - 2I \xrightarrow{A^{-1} \cdot} A^{-1}AX = A^{-1}(A - 2I) \Rightarrow X = I - 2A^{-1}$$

حال  $A^{-1}$  را بدست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

حال حاصل خواسته شده برابر است با:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \left( \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- اگر  $A$  ماتریس  $3 \times 3$  باشد و  $|A| = 4$ ، آنگاه دترمینان ماتریس  $|A| \cdot A$ ، کدام است؟

$$۲۵۶ \quad (۴)$$

$$۱۲۸ \quad (۳)$$

$$۹۶ \quad (۲)$$

$$۶۴ \quad (۱)$$

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۴

اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی  $n \times n$  باشند:

$$\bullet |AB| = |A||B|$$

$$\bullet |kA| = k^n |A|$$

$$\bullet |A^n| = |A|^n$$

چون  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  است داریم:

$$||A|A| = |A||A|^3 = 4 \times 4^3 = 4 \times 64 = ۲۵۶$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- به ازای کدام مقدار  $x$  و  $y$  ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  یک ماتریس قطری است؟

$$x = 2, y = -7 \quad (۲)$$

$$x = 1, y = -7 \quad (۱)$$

$$x = 1, y = -5 \quad (۴)$$

$$x = 2, y = -5 \quad (۳)$$

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۲

در ماتریس قطری، درایه‌های بیرون قطر اصلی صفر است:

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & -2x+4 & \dots \\ y+7 & \dots & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+4=0 \Rightarrow x=2 \\ y+7=0 \Rightarrow y=-7 \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز



۱۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، از رابطه  $AX=B$ ، ماتریس  $X$ ، کدام است؟

(۴)  $\begin{bmatrix} -1 & -12 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

(۳)  $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

(۲)  $\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

(۱)  $\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۱



اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ماتریسی وارون پذیر باشد ( $|A| \neq 0$ ) آن گاه:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ابتدا دو طرف  $AX=B$  را از طرف چپ در  $A^{-1}$  ضرب می کنیم:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1} \times B \Rightarrow X=A^{-1} \times B \xrightarrow{|A|=-1} X = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  باشد، درایه های سطر اول ماتریس  $A^3$ ، کدام است؟

(۴)  $[30 \ 6 \ 86]$

(۳)  $[24 \ 8 \ 86]$

(۲)  $[30 \ 6 \ 78]$

(۱)  $[30 \ 6 \ 64]$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ماتریس  $A^2$  را تشکیل می دهیم: (توجه شود که برای داشتن سطر اول ماتریس  $A^3$ ، داشتن سطر اول ماتریس  $A^2$  کفایت می کند).

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- جواب های معادله  $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$ ، کدام است؟

(۴) ۲ و ۵

(۳) ۱ و ۵

(۲) ۱ و ۴

(۱) ۱ و -۴

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۳

روش بسط در محاسبه دترمینان ماتریس

محاسبه دترمینان ماتریس  $3 \times 3$ ، با بسط حول سطر اول:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

توجه!

برای محاسبه دترمینان ماتریس  $3 \times 3$  به این روش، می توانیم حول هر سطر یا ستون دلخواه، بسط را انجام دهیم.



دترمینان را با بسط حول سطر اول محاسبه می کنیم:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-4)((2-x)(3-x) - 2) - ((3-x) - 3) + (2 - (3)(2-x)) = -4(x^2 - 5x + 4) - (-x) + (3x - 4) = 0$$

$$= -4x^2 + 20x - 16 + x + 3x - 4 = 0 \Rightarrow -4x^2 + 24x - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، درایه های سطر اول ماتریس  $A^4$ ، کدام است؟

(۱)  $[0 \ 1 \ 0]$  (۲)  $[1 \ 0 \ 0]$  (۳)  $[0 \ 0 \ 1]$  (۴)  $[1 \ 0 \ 1]$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۲

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $A^2$  را تشکیل می دهیم:

حال ماتریس  $A^4$ :



توجه:

برای رسیدن به درایه های سطر اول ماتریس  $A^4$ ، فقط کافی است که سطر اول  $A^2$  را در ماتریس  $A^2$  ضرب کنیم.

گروه آموزشی ماز

۲۰- جواب های معادله  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ، کدام است؟

(۱)  $4, -9$  (۲)  $3, -8$  (۳)  $-4, 9$  (۴)  $-3, 8$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۳



محاسبه دترمینان ماتریس  $3 \times 3$ ، با بسط حول سطر اول:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$



توجه:

برای محاسبه دترمینان ماتریس  $3 \times 3$  به این روش، می توانیم حول هر سطر یا ستون دلخواه، بسط را انجام دهیم.

دترمینان را با بسط حول سطر اول محاسبه کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1) \begin{vmatrix} 4 & x+5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} -2 & x+5 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} + (3) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ x-1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-4 - 6x - 30) - 2(2 - x^2 - 4x + 5) + 3(-12 - 4x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow -4 - 6x - 30 - 4 + 2x^2 + 8x - 10 - 36 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 10x - 72 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 36 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 9 \end{cases}$$



۲۱- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A، کدام است؟

(۱) ۳      (۲) ۵      (۳) ۱۲      (۴) ۱۳

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۱

روش اول:

ابتدا دو ماتریس اول را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 17 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 17 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$7 + 1 - 5 = 3$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A برابر است با:

روش دوم:

فرض کنید  $A = BCD$  باشد. در این صورت داریم:

$$BC \text{ سوم} = B \text{ سوم} \times C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ سوم} = BC \text{ سوم} \times D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A برابر است با:  $7 + 1 - 5 = 3$

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر ماتریس ناصفر  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  چنان باشد که  $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مقدار a کدام است؟

(۱) -۴      (۲) صفر      (۳) ۴      (۴) ۱۲

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5b_1 - 2b_2 = 4b_1 \Rightarrow b_1 = 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 = 4b_2 \end{cases}$$

حال در رابطه  $4b_1 + ab_2 = 4b_2$ ، به جای  $b_1$ ،  $2b_2$  قرار می‌دهیم:

$$4(2b_2) + ab_2 = 4b_2 \Rightarrow 8b_2 + ab_2 = 4b_2 \Rightarrow (8+a)b_2 = 4b_2 \Rightarrow 8+a = 4 \Rightarrow a = -4$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، کدام است؟

(۱) ۱۲      (۲) ۱۷      (۳) ۱۹      (۴) ۲۱

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا دو ماتریس اول را در هم ضرب کرده و سپس حاصل آن را در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

در نتیجه: مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A برابر ۲۱ است و گزینه ۴ صحیح است.

گروه آموزشی ماز



۲۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$  و ماتریس  $AB$  به ازای  $y \in \mathbb{Z}$  ماتریس اسکالر باشد، مقدار  $xy$  کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$AB = \begin{bmatrix} 2xz - 2z & 0 & 2x + 4y \\ 0 & 2 & 0 \\ 2yz + 2z^2 & \frac{y}{2} + \frac{z}{2} & 2y - 4yz \end{bmatrix}$$

درایه‌های قطر اصلی باید همگی ۲ باشند و درایه‌های خارج قطر اصلی صفر

$$\frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \rightarrow y = -z \xrightarrow{2y - 4yz = 2} 2y^2 + y - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = -1 & \checkmark \\ y = \frac{1}{2} & \times \end{cases}$$

$$\xrightarrow{2x + 4y = 0} x = 2 \Rightarrow xy = -2$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  و ماتریس  $X$  در رابطه ماتریسی  $X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  صدق کند، کوچک‌ترین درایه قطر اصلی ماتریس  $X$  کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

-۳ (۲)

-۱۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  داریم:

$$|A| = (3 - 4 - 12) - (-6 + 2 - 12) = 3$$

$$|A| = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \end{bmatrix}$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ،  $I$  ماتریس همانی و  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد حقیقی هستند که  $\alpha A + \beta I = A^{-1}$ ، مقدار  $\frac{\beta}{\alpha}$  کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

۴ (۲)

-۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\alpha A + \beta I = A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha & 2\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha + \beta & 2\alpha \\ 2\alpha & -2\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \\ -\alpha + \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{-1}{5} + \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 4$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس  $A^3$  کدام است؟

- (۱)  $[1 \ -1 \ 0]$  (۲)  $[9 \ 12 \ 16]$  (۳)  $[1 \ 0 \ -2]$  (۴)  $[9 \ 5 \ -7]$

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱



برای محاسبه یک سطر، یک ستون و یا یک درایه خاص از ضرب دو ماتریس به روش زیر عمل می‌کنیم:

- (۱)  $B \times \text{سطر } i \text{ ام } A = \text{سطر } i \text{ ام ماتریس } AB$   
 (۲)  $\text{ستون } j \text{ ام } A \times B = \text{ستون } j \text{ ام ماتریس } AB$   
 (۳)  $\text{ستون } j \text{ ام } B \times \text{سطر } i \text{ ام } A = \text{درایه سطر } i \text{ و ستون } j \text{ ماتریس } AB$

ابتدا سطر اول ماتریس  $A^2$  و سپس سطر اول ماتریس  $A^3$  را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{سطر اول } A^2: A \times \text{سطر اول } A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\text{سطر اول } A^3: A^2 \times \text{سطر اول } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

گروه آموزشی ماز

۲۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} \log_6^2 & \log_6^2 \\ \log_6^2 & \log_6^2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 6|A| & 2|A| \\ 3|A| & 36|A| \end{bmatrix}$  باشد، مقدار دترمینان  $B$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{9}{4}$  (۲)  $\frac{15}{4}$  (۳)  $\frac{9}{8}$  (۴)  $\frac{15}{8}$

(دشواری - محاسباتی - ۱۴۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴



دترمینان ماتریس

- (۱)  $1 \times 1$   
 $A = [a] \Rightarrow |A| = a$   
 (۲)  $2 \times 2$   
 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$   
 (۳)  $3 \times 3$   
 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

$$|A| = (\log_6^2)^2 - (\log_6^2)^2 = (\log_6^2 - \log_6^2)(\log_6^2 + \log_6^2)$$

$$= \log_6^{\frac{2}{3}} \times \log_6^{\frac{2}{3}} = \log_6^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 6|A| = \frac{2}{3} (*)$$

